Hecke operator on some K-groups related with finite groups (Algebraic Combinatorics)

AUTHOR(S):

翁長, 良成

数理解析研究所講究録 1394 巻 2004 年 86-87

Hecke operator on some K-groups related with finite groups

北海道大学理学研究科　翁長良成 (Yoshishige Onaga)
(Department of Mathmatics, Hokkaido University)

本稿は有限群に関連する Grothendieck 群のあいだのある写像についての計算結果を紹介するものである。目立った進展が得られていないため、内容は講演時のものと同一であることを予め断っておく。

G を有限群、H、K、L 等はその部分群とする。また、$R(H)$ を H の一般指標環とする。$R(H)$ から $R(K)$ への写像 $[H,x,\alpha,K]$(但し、$x\in G$、$\alpha\in R(H^x\cap K)$ とする) を次のように定義すると、$[H,x,\alpha,K]$ は $\mathbb{Z}$ 線型写像となる。

$$[H,x,\alpha,K](\mu)=({\mu^x}_{H^x\cap K}\cdot\alpha)^K \qquad (\forall\mu\in R(H)).$$

ここで、μ^x は μ の x による共役、${\mu^x}_{H^x\cap K}$ は μ^x の $H^x\cap K$ への制限、${\mu^x}_{H^x\cap K}\cdot\alpha$ は $R(H^x\cap K)$ における積、$({\mu^x}_{H^x\cap K}\cdot\alpha)^K$ は K への誘導である。この写像については次の性質が知られている ([1])。

$$[H,x,\alpha,K]=[H,hxk,\alpha^k,K] \qquad \big(h\in H,k\in K\big), \tag{1}$$

$$[H,x,\alpha_1+\alpha_2,K]=[H,x,\alpha_1,K]+[H,x,\alpha_2,K] \qquad \big(\alpha_1,\alpha_2\in R(H^x\cap K)\big), \tag{2}$$

$$\begin{aligned}&[H,x,\alpha,K][K,y,\beta,L]\\ &=\sum_{t\in\{H^{xy}\cap K^y\backslash K^y/K^y\cap L\}}[H,xyt,({\alpha^{xy}}_{H^{xyt}\cap K^y\cap L}\cdot\beta_{H^{xyt}\cap K^y\cap L})^{H^{xyt}\cap L},L].\end{aligned} \tag{3}$$

但し、(3) 式の $\{H^{xy}\cap K^y\backslash K^y/K^y\cap L\}$ は $H^{xy}\cap K^y\backslash K^y/K^y\cap L$ の完全代表系を意味する。また、$[H,x,\alpha,K][K,y,\beta,L]$ は写像の合成 $[K,y,\beta,L]\circ[H,x,\alpha,K]$ のことである。

さて (2) 式より、(3) 式を $H^{xy}\cap L$ の既約指標たちの $\mathbb{Z}$ 係数の線型結合で表すことを考えるのは極めて自然であろう。そのために, いくつか記号を準備しておく。

まず、$H^x\cap K$、$K^y\cap L$、$H^{xyt}\cap K^y\cap L$、$H^{xyt}\cap L$ の既約指標をそれぞれ次のようにおく。

$$Irr(H^x \cap K) = \{\eta_1, \dots, \eta_p\},$$
$$Irr(K^y \cap L) = \{\xi_1, \dots, \xi_q\},$$
$$Irr(H^{xyt} \cap K^y \cap L) = \{\theta_{t_1}, \dots, \theta_{t_l}\},$$
$$Irr(H^{xyt} \cap L) = \{\phi_1, \dots, \phi_n\}.$$

さらに、(3) 式を Mackey 分解や Frobenius の相互律を用いて計算していく過程で現れる $R(H^x \cap K)$、 $R(K^y \cap L)$、$R(H^{xyt} \cap K^y \cap L)$、$R(H^{xyt} \cap L)$ の元たちを次のように表しておく。

$$\alpha = \sum_{i=1}^{p} \langle \alpha, i \rangle \eta_i \qquad \big(\alpha \in R(H^x \cap K)\big),$$
$$\beta = \sum_{j=1}^{q} \langle \beta, j \rangle \xi_j \qquad \big(\beta \in R(K^y \cap L)\big),$$
$${\eta_i^{yt}}_{H^{xyt} \cap K^y \cap L} = \sum_{r=1}^{l} \langle \eta_i, t_r \rangle \theta_{t_r},$$
$$\xi_{j\, H^{xyt} \cap K^y \cap L} = \sum_{r'=1}^{l} \langle \xi_j, t_{r'} \rangle \theta_{t'_r},$$
$$(\theta_{t_r} \cdot \theta_{t'_r})^{H^{xyt} \cap L} = \sum_{s=1}^{n} \langle t_{rr'}, s \rangle \phi_s.$$

このとき、

$$[H, x, \alpha, K][K, y, \beta, L]$$
$$= \sum_{t,s} \left(\sum_{i,j,r,r'} \langle \alpha, i \rangle \langle \beta, j \rangle \langle \eta_i, t_r \rangle \langle \xi_j, t_{r'} \rangle \langle t_{rr'}, s \rangle \right) [H, xyt, \phi_s, L]$$

となる。ここに現れる係数たちに有意義な意味付けが可能かどうかは、現段階ではわかっていない。

参考文献

[1] 吉田知行,『有限 G 集合のカテゴリーのスパン』,「代数的 K-理論」研究集会報告集, p.p.104-128, 1982.